Construcción del Sistema Numérico mediante Imaginarios Operacionales

Volney Torres Almendro

Sistema de extensiones algebraicas basado en imaginarios para cada operación inversa

23 de julio de 2026

Abstract

Se presenta una construcción del sistema numérico desde los números naturales $\mathbb{N}$ hasta los números racionales $\mathbb{Q}$ (con proyección a $\mathbb{R}$) utilizando **imaginarios operacionales**. Cada operación inversa introduce un nuevo elemento simbólico ("imaginario") que no pertenece al dominio original, extendiendo así el espacio numérico de manera algebraica. Se determinan las propiedades estructurales de cada imaginario a partir de los axiomas mínimos de la extensión.

1 Dominio base: Naturales con cero

Partimos del monoide conmutativo:

$$\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, +, 0), \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1}$$

con las operaciones:

- **Suma** $(+)$: cerrada en $\mathbb{N}_0$, asociativa, conmutativa, elemento neutro 0.
- **Producto** $(\cdot)$: cerrado en $\mathbb{N}$, asociativo, conmutativo, elemento neutro 1, distributivo sobre $+$.

Todas las operaciones directas (suma y producto) son cerradas en el dominio. El problema surge al buscar operaciones inversas.

2 El imaginario de la resta: $\#i$

2.1 Planteamiento del problema

Queremos resolver la ecuación:

$$a + x = 0, \quad a \in \mathbb{N} \tag{2}$$

No existe solución en $\mathbb{N}_0$. Se postula un nuevo elemento $\#i$.

Definición 2.1 (Imaginario de la resta)**.** *El elemento $\#i$ se define mediante el axioma:*

$$1 + \#i = 0 \tag{3}$$

con las condiciones:

(i) $\#i \notin \mathbb{N}_0$ *(es externo al dominio original)*

(ii) $\#i$ *se combina mediante* $+$ *y* $\cdot$ *con todo elemento de* $\mathbb{N}_0$

(iii) La extensión $\mathbb{N}_0[\#i]$ *es cerrada bajo* $+$ *y* $\cdot$

(iv) Se preservan asociatividad, conmutatividad y distributividad

2.2 Propiedades deducidas

Lema 2.1 (Acción sobre cualquier natural)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$n + n \cdot \#i = 0 \tag{4}$$

Proof. Por distributividad: $n \cdot (1 + \#i) = n \cdot 0 = 0$. Pero $n \cdot (1 + \#i) = n \cdot 1 + n \cdot \#i = n + n \cdot \#i$. Por tanto $n + n \cdot \#i = 0$. □

Esto justifica la notación: $-n = n \cdot \#i$. Todo número negativo se expresa como un número natural multiplicado por el imaginario $\#i$.

Lema 2.2 (Cuadrado de $\#i$)**.**

$$\#i^2 = 1 \tag{5}$$

Proof. De $1 + \#i = 0$ se tiene $\#i = -1$ (en notación tradicional). Multiplicando la ecuación $1+\#i = 0$ por $\#i$: $\#i \cdot (1+\#i) = \#i \cdot 0 \implies \#i + \#i^2 = 0$. Pero $\#i + 1 = 0$ (por conmutatividad: $1 + \#i = \#i + 1 = 0$). Por unicidad del inverso aditivo: $\#i^2 = 1$. □

Propiedad 2.1 (Estructura algebraica de $\#i$)**.**

- ***Ecuación definitoria:*** $1 + \#i = 0$
- ***Notación tradicional:*** $\#i = -1$
- ***Cuadrado:*** $\#i^2 = 1$
- ***Polinomio mínimo:*** $x^2 - 1 = 0$
- ***Álgebra generada:*** $\mathbb{R}[\#i]/\langle \#i^2 - 1 \rangle$ *(números hiperbólicos o split-complex)*

El álgebra de los números hiperbólicos tiene el producto:

$$(a + b\#i)(c + d\#i) = (ac + bd) + (ad + bc)\#i \tag{6}$$

y es isomorfa a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ mediante:

$$a + b\#i \longleftrightarrow (a + b,\ a - b) \tag{7}$$

2.3 Extensión resultante: los enteros $\mathbb{Z}$

Todo número entero se expresa como:

$$\mathbb{Z} = \{n + m \cdot \#i \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \tag{8}$$

En forma normal (usando $1 + \#i = 0$):

$$\mathbb{Z} \cong \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}_0\} \tag{9}$$

Hemos construido $\mathbb{Z}$ como extensión algebraica de $\mathbb{N}_0$ mediante el imaginario $\#i$ con $\#i^2 = 1$.

3 El imaginario de la división: $\#j_m$

3.1 Planteamiento del problema

Ahora en $\mathbb{Z}$ queremos resolver:

$$a \cdot x = 1, \quad a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{10}$$

No hay solución en $\mathbb{Z}$ (salvo $a = \pm 1$). Se postula una familia de imaginarios $\#j_m$, uno para cada módulo $m \in \mathbb{N}$.

Definición 3.1 (Imaginario de la división por m)**.** *Para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, se define $\#j_m$ mediante:*

$$m \cdot \#j_m = 1 \tag{11}$$

con condiciones análogas a las de $\#i$: es externo a $\mathbb{Z}$, se combina mediante $+$ y $\cdot$, y preserva la estructura de anillo.

3.2 Propiedades deducidas

Lema 3.1 (Inverso multiplicativo)**.**

$$\#j_m = \frac{1}{m} \tag{12}$$

Lema 3.2 (Producto de imaginarios)**.** *Para $m, n \in \mathbb{N}$:*

$$\#j_m \cdot \#j_n = \#j_{mn} \tag{13}$$

Proof. $(m \cdot \#j_m) \cdot (n \cdot \#j_n) = 1 \cdot 1 = 1$. Por otro lado: $(mn) \cdot (\#j_m \cdot \#j_n) = 1$. Por unicidad del inverso multiplicativo: $\#j_m \cdot \#j_n = \#j_{mn}$. □

Lema 3.3 (Cuadrado de $\#j_m$)**.**

$$(\#j_m)^2 = \frac{1}{m} \cdot \#j_m = \#j_m \cdot \#j_m \tag{14}$$

En el álgebra generada, $(\#j_m)^2$ no es una constante universal sino un elemento proporcional a $\#j_m$.

3.3 Relación entre $\#i$ y $\#j_m$

Asumimos conmutatividad:

$$\#i \cdot \#j_m = \#j_m \cdot \#i \tag{15}$$

El **álgebra completa para el módulo** m es:

$$\mathcal{A}_m = \mathbb{Z}[\#i, \#j_m] / \langle \#i^2 - 1,\ m \cdot \#j_m - 1,\ \#i \cdot \#j_m - \#j_m \cdot \#i \rangle \tag{16}$$

3.4 Tabla comparativa de imaginarios

Imaginario	Operación inversa	Ecuación	Cuadrado	Extensión
$\#i$	Suma (resta)	$1 + \#i = 0$	$\#i^2 = 1$	$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$
$\#j_m$	Producto (división)	$m \cdot \#j_m = 1$	$\#j_m^2 = \frac{1}{m}\#j_m$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1/m]$

4 Representación de racionales y congruencias

4.1 Representación compleja para módulo m

Dado un número $a \in \mathbb{Z}$ y un módulo $m \in \mathbb{N}$, por el algoritmo de la división:

$$a = q \cdot m + r, \quad 0 \leq r < m \tag{17}$$

Definimos la representación:

$$\boxed{\psi_m(a) = q + r \cdot \#j_m} \tag{18}$$

donde:

- $q \in \mathbb{Z}$ es la **parte entera** (coeficiente "real")
- $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ es el **residuo**
- $r \cdot \#j_m$ es la **parte fraccionaria** (coeficiente "imaginario")

4.2 El número racional como cociente

El número racional a/m se expresa naturalmente:

$$\frac{a}{m} = \frac{q \cdot m + r}{m} = q + \frac{r}{m} = q + r \cdot \#j_m = \psi_m(a) \tag{19}$$

Propiedad fundamental: Todo número racional con denominador m es un "número complejo" con parte real entera y parte imaginaria fraccionaria.

4.3 Congruencias en esta representación

Dos números a, b con el mismo módulo m:

$$a = q_a \cdot m + r_a \quad \longrightarrow \quad \psi_m(a) = q_a + r_a \cdot \#j_m \tag{20}$$

$$b = q_b \cdot m + r_b \quad \longrightarrow \quad \psi_m(b) = q_b + r_b \cdot \#j_m \tag{21}$$

Congruencia:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff r_a = r_b \iff \text{La parte fraccionaria de } \psi_m(a) \text{ y } \psi_m(b) \text{ coinciden} \tag{22}$$

Es decir, la **componente imaginaria** (coeficiente de $\#j_m$) codifica exactamente la clase de congruencia módulo m.

4.4 División en el espacio extendido

El cociente de dos representaciones:

$$\frac{\psi_m(a)}{\psi_m(b)} = \frac{q_a + r_a \cdot \#j_m}{q_b + r_b \cdot \#j_m} \tag{23}$$

Para $q_b \neq 0$, el inverso en $\mathcal{A}_m$ es:

$$\psi_m(b)^{-1} = \frac{q_b - r_b \cdot \#j_m}{q_b^2 - r_b^2 \cdot (\#j_m)^2} \tag{24}$$

La parte imaginaria de este cociente contiene información sobre la relación entre los residuos, permitiendo detectar congruencias mediante anulación de ciertas componentes.

5 Proyección hacia los reales

5.1 Estructura general de extensiones

El programa de construcción se resume en:

Dominio	**Operación inversa**	**Imaginario**	**Propiedad**
$\mathbb{N}_0$	Suma	$\#i$	$\#i^2 = 1$
$\mathbb{Z}$	Producto (por m)	$\#j_m$	$m \cdot \#j_m = 1$
$\mathbb{Q}$	Raíz/Límite	$\#k$ (pendiente)	?

5.2 Preguntas abiertas

1. **¿Existe un único $\#j$ universal?** Si $\#j$ es el inverso de un módulo universal m_0 (por ejemplo, la base de numeración), entonces $\mathbb{Z}[\#j]$ genera todas las fracciones con denominador potencia de m_0. Para obtener todos los racionales se necesitan todos los $\#j_m$ o un mecanismo de límite.

2. **¿Cómo se construye $\mathbb{Q}$ completo?** Opciones:

   - Unión de todas las extensiones $\mathbb{Z}[\#j_m]$
   - Localización del anillo $\mathbb{Z}$ respecto al conjunto multiplicativo $\mathbb{N}$
   - Introducción de un imaginario "universal" $\#j$ con propiedades adicionales

3. **El imaginario para $\mathbb{R}$ ($\#k$):** ¿Qué operación inversa lo define?

   - ¿La raíz cuadrada? ($x^2 = a$, generando $\sqrt{a}$)
   - ¿El límite de sucesiones de Cauchy? (completitud métrica)
   - ¿La integral? (operación inversa de la derivada)

   Esto requiere un análisis separado.

6 Conclusiones

(1) El sistema numérico puede construirse sistemáticamente añadiendo **imaginarios operacionales**, uno por cada operación inversa.

(2) El imaginario de la resta $\#i$ satisface $\#i^2 = 1$ y genera el álgebra de los números hiperbólicos (split-complex). Extiende $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{Z}$.

(3) El imaginario de la división $\#j_m$ satisface $m \cdot \#j_m = 1$ y permite representar números racionales como "complejos" con parte real entera y parte imaginaria fraccionaria.

(4) En esta representación, la **parte imaginaria** (coeficiente de $\#j_m$) codifica el residuo módulo m, haciendo que la teoría de congruencias emerja naturalmente de la estructura algebraica.

(5) El cociente de dos representaciones complejas preserva información sobre las clases de congruencia, estableciendo un puente entre la aritmética modular y el análisis complejo.

(6) Queda abierta la determinación del imaginario $\#k$ para completar $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, que requerirá identificar la operación inversa correspondiente (raíz, límite, u otra).

7 El imaginario de la completitud: $\#k$

7.1 Planteamiento del problema

En $\mathbb{Q}$ existen sucesiones de Cauchy que no convergen. Ejemplo:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 2/x_n}{2} \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \tag{25}$$

Se postula un nuevo tipo de imaginario $\#k$ para "llenar" estos huecos. A diferencia de $\#i$ y $\#j_m$, la completitud no se logra añadiendo un solo elemento algebraico, sino una **familia** de infinitesimales.

7.2 El infinitesimal ε como $\#k$

Definición 7.1 (Infinitesimal)**.** *Un elemento ε es **infinitesimal** si:*

$$\varepsilon \neq 0 \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N},\ |\varepsilon| < \frac{1}{n} \tag{26}$$

Ningún número en $\mathbb{Q}$ satisface esta propiedad.

Observación 7.1 (No unicidad del infinitesimal)**.** *Si ε es infinitesimal, también lo son $\varepsilon/2$, ε^2, 2ε, $-\varepsilon$. Además, pueden existir infinitesimales independientes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ con diferentes órdenes de magnitud.*

7.3 Tres modelos de ε

Vía 1: Dual: $\varepsilon^2 = 0$ (números duales $\mathbb{Q}[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle$). Genera geometría diferencial sintética, pero no contiene irracionales.

Vía 2: Nilpotente general: $\varepsilon^k = 0$ para algún k. Genera series de Taylor truncadas. Útil para aproximaciones, pero requiere paso al límite para obtener $\mathbb{R}$.

Vía 3: Hiperreal (Robinson): $\varepsilon^n \neq 0$ para todo n. Se construye como $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ con un ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$. Contiene infinitos infinitesimales de diferentes órdenes.

7.4 Construcción de $\mathbb{R}$ mediante infinitesimales

Sea $\mathcal{E} = \{\varepsilon_\alpha\}$ un conjunto de infinitesimales independientes. Definimos:

Definición 7.2 (Anillo extendido)**.** $\mathbb{Q}[\mathcal{E}]$ *es el anillo generado por $\mathbb{Q}$ y todos los elementos de $\mathcal{E}$.*

Definición 7.3 (Elemento finito)**.** $x \in \mathbb{Q}[\mathcal{E}]$ *es* ***finito*** *si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| < n$.*

Definición 7.4 (Equivalencia infinitesimal)**.** $x \sim y \iff x - y$ *es infinitesimal o cero.*

Definición 7.5 (Número real)**.**

$$\boxed{\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{Q}[\mathcal{E}] \mid x \text{ es finito}\}/\sim} \tag{27}$$

7.5 Propiedades de la construcción

Propiedad 7.1. $\mathbb{R}$ *así definido es un cuerpo completo y ordenado que contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo denso.*

Propiedad 7.2. *Todo número real es la clase de equivalencia de una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ (vía la identificación con elementos de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$).*

7.6 Jerarquía de imaginarios

Imaginario	Cantidad	Parámetro	Extensión
$\#i$	1 (único)	—	$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$
$\#j_m$	$\aleph_0$ (numerable)	$m \in \mathbb{N}$	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$
$\#k_\varepsilon$	$\mathfrak{c}$ (continuo)	$\varepsilon \in \mathcal{E}$	$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

La cardinalidad de los imaginarios crece con la complejidad de la operación inversa: la resta tiene una ecuación sin solución, la división tiene $\aleph_0$, y la completitud tiene $\mathfrak{c}$.

7.7 Conexión con el análisis no estándar

En el modelo de Robinson, $\mathbb{R}$ se construye como:

$$\mathbb{R} \cong \{x \in {}^*\mathbb{Q} \mid x \text{ es finito}\}/\{\text{infinitesimales}\} \tag{28}$$

donde ${}^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ es el cuerpo de los números hiperracionales. Esta construcción es exactamente análoga a la presentada aquí con $\mathcal{E}$.

8 Unificación de los imaginarios

8.1 El álgebra total

Todos los imaginarios coexisten en una única álgebra:

$$\mathcal{A} = \mathbb{N}_0[\#i, \{\#j_\alpha\}_{\alpha \in {}^*\mathbb{N}}]/\langle 1+\#i = 0,\ \alpha{\cdot}\#j_\alpha = 1,\ \#i\#j_\alpha = \#j_\alpha\#i,\ \#j_\alpha\#j_\beta = \#j_{\alpha\beta}\rangle \tag{29}$$

8.2 Descubrimiento fundamental: $\#k_\varepsilon \equiv \#j_\omega$

El imaginario de la completitud NO es independiente. Es exactamente:

$$\boxed{\#k_\varepsilon = \#j_\omega \quad \text{donde } \omega \text{ es un número infinito}} \tag{30}$$

8.3 Dos regímenes de $\#j_\alpha$

Régimen	α	$\#j_\alpha$	Tipo
Estándar	$m \in \mathbb{N}$ finito	$1/m$	Racional
Infinito	ω infinito	ε	Infinitesimal

8.4 Consecuencias

1. Solo existen DOS tipos fundamentales de imaginarios:
   - $\#i$ para la operación inversa de la suma
   - $\#j_\alpha$ para la operación inversa del producto
2. $\#k$ es redundante: es $\#j_\omega$ con ω infinito.
3. La completitud no es una nueva operación, sino la extensión del parámetro α a valores infinitos en el ultraproducto.
4. $\mathbb{R}$ se obtiene como el cociente de los elementos finitos de $\mathcal{A}$ módulo la relación de equivalencia infinitesimal.

8.5 Panorama completo de la construcción

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{N}_0 & & \\
\downarrow & \text{Añadir } \#i : 1 + \#i = 0 & \\
\mathbb{Z} & = & \mathbb{N}_0[\#i]/\langle \#i^2 = 1 \rangle \\
\downarrow & \text{Añadir } \#j_m \text{ para } m \in \mathbb{N} : m \cdot \#j_m = 1 & \\
\mathbb{Q} & = & \mathbb{Z}[\{\#j_m\}_{m\in\mathbb{N}}] \\
\downarrow & \text{Extender a } \alpha \in {}^*\mathbb{N} : \alpha \cdot \#j_\alpha = 1 & \\
{}^*\mathbb{Q} & = & \mathbb{Z}[\{\#j_\alpha\}_{\alpha\in{}^*\mathbb{N}}] \\
\downarrow & \text{Cocientar: } x \sim y \iff x - y \text{ es infinitesimal} & \\
\mathbb{R} & = & {}^*\mathbb{Q}_{\text{finito}}/\sim
\end{array}
\tag{31}
$$

9 Representación de $\sqrt{2}$ en el sistema unificado

9.1 Método babilónico

La sucesión definida por:

$$
x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 2/x_n}{2} \tag{32}
$$

converge a $\sqrt{2}$.

9.2 Expresión con imaginarios

Cada iteración es un racional expresable con $\#j$:

$$x_0 = 1 = 1 \cdot \#j_1 \tag{33}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} = 3 \cdot \#j_2 \tag{34}$$

$$x_2 = \frac{17}{12} = 17 \cdot \#j_{12} \tag{35}$$

$$x_3 = \frac{577}{408} = 577 \cdot \#j_{408} \tag{36}$$

9.3 Elemento en el ultraproducto

$$\psi = [(1, 3/2, 17/12, 577/408, \ldots)] \in {}^*\mathbb{Q} \tag{37}$$

9.4 Representación canónica

$$\boxed{\psi = Q + R \cdot \#j_\Omega} \tag{38}$$

donde:

- $Q = 1$ (parte entera)
- $R = [(0, 1, 5, 169, \ldots)] \in {}^*\mathbb{N}$
- $\Omega = [(1, 2, 12, 408, \ldots)] \in {}^*\mathbb{N}$ (infinito)

9.5 Verificación de $\psi^2 \approx 2$

$$\psi^2 = (1 + R \cdot \#j_\Omega)^2 \tag{39}$$

$$= 1 + 2R \cdot \#j_\Omega + R^2 \cdot \#j_{\Omega^2} \tag{40}$$

$$= [(1^2, (3/2)^2, (17/12)^2, (577/408)^2, \ldots)] \tag{41}$$

$$= [(1, 9/4, 289/144, 332929/166464, \ldots)] \tag{42}$$

El error:

$$\psi^2 - 2 = [(-1, 1/4, 1/144, 1/166464, \ldots)] \tag{43}$$

Esta sucesión tiende a 0, por lo que es un infinitesimal en ${}^*\mathbb{Q}$. Por tanto, en $\mathbb{R} = {}^*\mathbb{Q}_{\text{finito}}/\sim$:

$$[\psi]^2 = 2 \quad \text{en } \mathbb{R} \tag{44}$$

9.6 Teorema de representación

Teorema 9.1. *Todo número real x admite una representación:*

$$x = Q + R \cdot \#j_\Omega \tag{45}$$

donde:

- $Q = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
- $\Omega \in {}^*\mathbb{N}$ *es infinito*
- $R \in {}^*\mathbb{N}$ *con* $0 \leq R < \Omega$
- $\{x\} = [R \cdot \#j_\Omega]$ *en* $\mathbb{R}$

10 Correcciones y refinamientos

10.1 Corrección sobre $\#i$ y los números hiperbólicos

Observación 10.1 (Crítica aceptada)**.** *La afirmación de que* $\mathbb{N}_0[\#i]/\langle 1 + \#i = 0\rangle$ *genera los números hiperbólicos es* ***incorrecta****. La relación* $1+\#i = 0$ *fuerza* $\#i = -1$*, colapsando el álgebra a* $\mathbb{Z}$ *(1-dimensional), no a los split-complex (2-dimensionales).*

Corrección 10.1. *La construcción correcta es:*

$$\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}_0[\#i]\big/\langle 1 + \#i = 0\rangle \tag{46}$$

Esto es el ***grupo de Grothendieck*** *del monoide* $(\mathbb{N}_0, +)$*, no un álgebra hiperbólica.*

10.2 Corrección sobre la fórmula del inverso

Observación 10.2 (Crítica aceptada)**.** *El anillo* $\mathbb{Z}[\#j_m]$ *no es cerrado bajo inversos multiplicativos. La fórmula del inverso requiere trabajar en la localización completa* $\mathbb{Z}[1/m]$*, no solo con* $\#j_m$*.*

Corrección 10.2. *Para tener inversos, se requieren todos los imaginarios* $\#j_{m^k}$*:*

$$\mathbb{Z}[1/m] \cong \mathbb{Z}[\#j_m, \#j_{m^2}, \#j_{m^3}, \ldots] \tag{47}$$

En este anillo, el inverso de $q + r/m$ *es* $m/(qm + r)$ *cuando* $qm + r \neq 0$*.*

10.3 Corrección sobre $\#k = \#j_\omega$

Observación 10.3 (Crítica aceptada)**.** *La identificación $\#k = \#j_\omega$ no es un teorema del álgebra base, sino una interpretación en un modelo no estándar que requiere un ultrafiltro y la existencia de números naturales infinitos.*

Corrección 10.3. *La relación correcta es una* ***analogía estructural****:*

- *$\#j_m$ con m finito: inverso multiplicativo $\rightarrow$ racionales*
- *$\#j_\omega$ con ω infinito: representación de infinitesimales $\rightarrow$ reales (en modelo no estándar)*

No es una identidad algebraica sino una correspondencia semántica en el modelo de Robinson.

10.4 Marco unificado con construcciones universales

Extensión	**Construcción universal**	**Imaginario**
$\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$	Grupo de Grothendieck $K_0(\mathbb{N}_0, +)$	$\#i$
$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$	Localización $S^{-1}\mathbb{Z}$	$\#j_m$
$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$	Completación de Cauchy	$\#k_\varepsilon$ (repr. no estándar)